

# **REASONING AND PROOF DALAM MODEL PEMBELAJARAN *RECIPROCAL* MATERI TRIGONOMETRI SISWA SMA**

Afin Nur Latifa, M.Pd

SMA Negeri 1 Magetan, Ds.Sugihrejo RT.14 RW.03 Kawedanan Magetan, afinlatifa@gmail.com

**Abstrak.** Penalaran dan pembuktian matematis merupakan cara yang kuat dalam mengembangkan dan mengekspresikan pemahaman pada fenomena yang luas. Siswa yang memiliki kemampuan bernalar dan berpikir secara analitis cenderung memperhatikan pola, struktur, atau keteraturan baik di situasi nyata maupun dalam objek simbolis. Namun, berdasarkan TIMSS kemampuan penalaran matematis siswa saat ini di Indonesia masih tergolong rendah, sehingga guru harus dapat menekankan bahwa bernalar sangat penting untuk dipelajari serta guru hendaknya menggunakan pembelajaran yang tepat untuk mengembangkan kemampuan bernalar dan pembuktian siswa SMA. Fenomena yang berada pada kurikulum 2013, trigonometri melibatkan siswa untuk bernalar dan pembuktian untuk mendorong siswa memiliki kemampuan berpikir tingkat tinggi secara kritis, logis, dan sistematis. Artikel ini menyajikan pemikiran teoritis dan pentingnya suatu pembelajaran yang dapat mengembangkan kemampuan bernalar dan pembuktian siswa.

**Kata kunci:** penalaran dan pembuktian, *reciprocal teaching*, trigonometri.

## **1. Pendahuluan**

Kemampuan penalaran merupakan salah satu kemampuan yang harus dimiliki oleh siswa (NCTM, 2000). Hal tersebut sesuai dengan salah satu tujuan kurikulum 2013 pada mata pelajaran matematika di tingkat SMA (Sekolah Menengah Atas) yaitu siswa dapat melakukan penalaran matematis. Hal tersebut menunjukkan bahwa penalaran matematis sangat diperlukan oleh siswa SMA. Pembuktian merupakan keterampilan dasar untuk seorang matematikawan, bagaimanapun keterampilan tersebut sulit untuk dipelajari oleh beberapa siswa (Knapp, 2005). Knapp (2005) mengelompokkan kesulitan siswa menjadi dua kategori, yaitu: (1) siswa berjuang untuk logika, bahasa, dan aturan pembuktian yang ditentukan oleh suatu kelompok, dan (2) pengetahuan siswa tentang definisi, teorema, heuristik dan kemampuan membuat contoh. Oleh karena itu, kemampuan penalaran dan pembuktian sangat penting bagi siswa.

Banyak siswa yang kesulitan belajar penalaran, argumentasi, dan pembuktian matematis (Heinze, 2006; Yang, 2010; Reiss, 2002). Kesulitan yang dialami oleh siswa di antaranya adalah siswa sulit dalam menuliskan pembuktian secara formal, siswa kesulitan menuliskan penalarannya secara sistematis, dan pengetahuan siswa tentang definisi dan teorema matematika. Sehingga, penalaran dan pembuktian dalam pelajaran matematika harus dikembangkan. Hal tersebut sesuai dengan pendapat Ardiansyah (2015) yang menyatakan bahwa kemampuan penalaran matematis perlu dikembangkan karena dapat melatih siswa untuk lebih memahami materi matematika yang diajarkan. Namun, kenyataannya

kemampuan penalaran matematis siswa saat ini di Indonesia masih tergolong rendah yang didasarkan assesmen yang dilakukan TIMSS pada tahun 2011 (OECD, 2016).

Pembelajaran yang dapat mengakomodasi kesulitan siswa dalam belajar salah satunya adalah *reciprocal teaching* (Garderen, 2004). Vygotsky (Meyer, 2014) menyatakan bahwa *reciprocal teaching* berpijak pada teori konstruktivisme sosial, dimana siswa dituntut untuk aktif berdiskusi dan menjelaskan hasil pekerjaannya dengan baik sehingga penguasaan konsep dapat dicapai. Beberapa penelitian tentang *reciprocal teaching* yang dilakukan oleh Ardiansyah (2015) dan Anggraeni (2012) menunjukkan bahwa *reciprocal teaching* dapat meningkatkan penalaran matematis siswa.

Artikel ini akan menyajikan suatu kajian teori berdasarkan pendapat para ahli dan penelitian terdahulu tentang mengembangkan penalaran dan pembuktian matematis siswa dalam pembelajaran kooperatif tipe *reciprocal* pada materi trigonometri.

## 2. Kajian Teori

### 2.1. Penalaran dan Pembuktian

Pang (2009) berpendapat bahwa penalaran merupakan komponen utama dalam matematika terutama dalam pemecahan masalah. Hal tersebut sesuai dengan NCTM (2000) yang mengemukakan bahwa kemampuan penalaran merupakan bagian yang penting dalam matematika. Sementara itu, Russefendi (2006) mengatakan bahwa matematika terbentuk sebagai hasil pemikiran yang berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran. Oleh karena itu, matematika dan penalaran merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan.

Bieda (2013) mengatakan bahwa penalaran melibatkan proses untuk menggeneralisasi kejadian matematis atau konjektur tentang hubungan matematis. Selanjutnya, Dhebora (2003) mengatakan bahwa penalaran merupakan instrument penyelidikan untuk menemukan dan bereksplorasi ide-ide baru dan berfungsi sebagai pembenaran atau pembuktian klaim matematis. Sedangkan, Boesen (2010) mengatakan bahwa penalaran adalah membuat pernyataan dan menemukan konklusi dalam menyelesaikan suatu masalah. Hal tersebut menunjukkan bahwa penalaran merupakan proses berfikir yang menghasilkan kesimpulan/dugaan dari suatu masalah yang bisa dinyatakan dalam bentuk kalimat atau simbol (generalisasi), sehingga kebenaran proses membuat kesimpulan tersebut dapat dipertimbangkan. Ketika yang dihadapi merupakan masalah atau ide matematika maka penalaran/pembuktian tersebut dinamakan penalaran/pembuktian matematis (Sumarmo, 2012).

NCTM (2000) mengatakan bahwa pembuktian matematis merupakan suatu cara formal mengekspresikan penalaran dan pembenaran. Pembuktian melibatkan pembenaran dugaan matematis menjadi benar dalam rangka dugaan tersebut dapat berlaku, menggunakan penalaran yang valid secara logis (Bieda, 2013). Pembuktian menurut Dhebora (2003) lebih mengacu pada menguji kredibilitas suatu asumsi dari pada menetapkan kebenaran dari suatu pernyataan. Sedangkan menurut Almeida (dalam Knapp, 2005) pembuktian melibatkan proses menguji kebenaran, menjelaskan, mengkomunikasikan, mempengaruhi, dan membangun pengetahuan atau kejadian baru dalam bentuk aksioma. Oleh karena itu,

pembuktian merupakan proses menguji dugaan/klaim/kesimpulan sehingga dugaan/klaim/kesimpulan tersebut terbukti kebenarannya.

Penalaran dan pembuktian tidak dapat diajarkan dalam satu unit terpisah (NCTM, 2000). Hal ini berarti bahwa dalam mengajarkan pembuktian juga harus diajarkan penalaran. Sehingga siswa bisa mempertanggungjawabkan setiap proses yang dilakukan ketika membuktikan. Sebagai contoh, “membuktikan identitas trigonometri”. Kadangkala mengembangkan pembuktian diberikan melalui masalah (NCTM). Pada proses memperjelas penyelesaian masalah melibatkan penalaran sebagai penguat hasilnya, selain itu dibutuhkan berbagai strategi untuk memecahkan masalah, diantaranya adalah membuat tabel, gambar, atau menyederhanakan permasalahan (Nelson Primary School, 2014).

Pengembangan penalaran dan pembuktian pada tingkat pengalaman yang sesuai harus menjadi bagian terpenting dalam pembelajaran matematika untuk siswa di segala usia (Stacey, 2009). Hal ini berarti penalaran dan pembuktian bisa diajarkan kepada siswa di semua tingkat pendidikan. Standar penalaran dan pembuktian untuk pembelajaran di kelas *play group* sampai di sekolah menengah atas (SMA) yang tercantum dalam NCTM (2000) dalam kode *Reasoning and Proof* (RP) sebagai berikut.

1. Mengenali penalaran dan pembuktian sebagai bagian dasar matematika (kode RP1)
2. Membuat dan menginvestigasi konjektur matematis (RP2)
3. Mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan pembuktian matematis (RP3)
4. Memilih dan menggunakan berbagai macam penalaran dan metode pembuktian (RP4)

Siswa sekolah menengah atas (SMA) harus bisa bernalar secara induktif dan deduktif dalam melakukan penalaran dan pembuktian. Siswa harus melihat kelebihan dari pembuktian deduktif untuk menetapkan hasil. Mereka harus bisa membuat argumen yang logis dan membuat bukti formal yang bisa menjelaskan penalarannya secara efektif (NCTM, 2000). Nelson Primary School (2014) menjelaskan bahwa penalaran induktif digunakan untuk membangun generalisasi dari suatu pola dan untuk membuktikan generalisasi tersebut selalu berlaku, maka dibutuhkan pembuktian deduktif. Berdasarkan pendapat-pendapat di atas, kemampuan bernalar baik induktif maupun deduktif sangat penting bagi siswa SMA.

## ***2.2. Reciprocal Teaching***

Palinesar & Brown (dalam Slavin, 2008) menjelaskan bahwa pendekatan *reciprocal teaching* didasarkan pada teori konstruktivis yang dapat meningkatkan keterampilan membaca dan pemahaman pada siswa yang berkemampuan rendah. Pada proses *reciprocal teaching* terjadi interaksi antara guru dan siswa yang saling bergiliran melakukan proses pembelajaran (Oezkus, 2013). Reilly, dkk (2009) mendefinisikan *reciprocal teaching* pada matematika sebagai strategi pembelajaran yang dapat membangun kemampuan pemecahan masalah dan meningkatkan literasi matematika. Sedangkan Howard (2004) menyatakan *reciprocal teaching* dirancang sebagai teknik diskusi kelompok yang bertujuan untuk memahami dan mengingat suatu materi. Berdasarkan beberapa pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa *reciprocal teaching* merupakan suatu strategi pembelajaran yang dapat meningkatkan pemahaman siswa dengan memberikan kesempatan pada siswa untuk berinteraksi dengan guru maupun teman kelompok dalam memahami suatu masalah atau materi.

Cooper & Greive (2010) mengatakan bahwa *reciprocal teaching* terdiri dari empat langkah, yaitu: menanya (*questioning*), mengklarifikasi (*clarifying*), merangkum (*summarizing*), dan memprediksi (*predicting*). Adapun penjelasan dari empat tahap tersebut yaitu sebagai berikut.

a. Menanya (*Questioning*)

Oczkus (2013) berpendapat bahwa klarifikasi membantu siswa memantau pemahaman mereka sendiri. Hal ini dikarenakan saat mengklarifikasi mereka akan mengidentifikasi masalah yang mereka hadapi dalam memahami bagian-bagian dari teks atau mencari kata-kata sulit. Hal yang sama diungkapkan oleh Doolittle, dkk (2006:107) bahwa:

*“Clarifying involves the identification and clarification of unclear, difficult, or unfamiliar aspect of a text. These aspect may include awkward sentence or passage structure, unfamiliar vocabulary, unclear references, or obscure concept. Clarifying provides the motivation to remediate confusion through re-reading, the use of context in which the text was written and read, and the use of external resources (e.g., dictionary).”*

Berdasarkan beberapa pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa klarifikasi dapat dengan memahami kembali materi dengan menggunakan sumber-sumber lain yang relevan. Dengan demikian, siswa akan lebih memahami materi dan mengembangkan penalarannya dari permasalahan yang diberikan oleh guru.

b. Merangkum (*Summarizing*)

Rangkuman dibutuhkan untuk menyimpan data yang diperlukan dari data dengan jumlah besar (Deshpande, 2013). Rangkuman dari penyimpanan data yang besar sangat berguna untuk mereduksi data yang tidak digunakan berdasarkan informasi atau pengetahuan yang diinginkan. Selanjutnya menurut Boch (2005), siswa diharapkan membuat catatan ekstensif pada materi pembelajaran yang dipelajari untuk meyalurkan bagaimana pemikiran dan pemahamannya. Rangkuman pemahaman siswa dengan sadar mengungkapkan dan merefleksikan pemikirannya yang dapat dituliskan dalam media baik kertas, maupun media lainnya (Ardiansyah, 2015). Berdasarkan beberapa pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa rangkuman merupakan bagian penting dalam proses belajar siswa untuk mengetahui bagaimana pemikiran dan pemahaman siswa dari materi yang dipelajari yang dapat dituliskan dalam berbagai media.

c. Memprediksi (*Predicting*)

Kegiatan memprediksi didasarkan pada fakta-fakta dari buku yang membawa siswa pada kemungkinan yang akan datang selanjutnya (Oczkus, 2013). Berkenaan aktivitas prediksi, Reilly, dkk (2009:185) mengatakan sebagai berikut.

*“During the prediction stage the learner is required to predict the type of mathematical questions they are being asked, what type of mathematical operations they may be required to use and what their answer might look like.”*

Berdasarkan beberapa pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa dengan memprediksi memberikan kesempatan siswa untuk menggunakan apa yang telah mereka pahami dalam menyelesaikan suatu masalah. Pada saat memprediksi siswa melibatkan kemampuan berpikir dan bernalar yang telah mereka miliki.

### **Penalaran dan Pembuktian dalam *Reciprocal Teaching***

Tahapan pada *reciprocal teaching* dapat dimodifikasi untuk mengakomodasi siswa dalam kesulitan belajar (Garderen, 2004). Pada penelitian yang dilakukan oleh Ardiansyah (2015) modifikasi kegiatan *reciprocal teaching* yang relevan dengan indikator kemampuan penalaran matematis. Kegiatan *questioning* memiliki hubungan dengan indikator mengajukan pertanyaan dan memberikan alasan terhadap kebenaran solusi, kegiatan *clarifying* memiliki hubungan dengan indikator menganalisis pernyataan dan memberikan alasan terhadap kebenaran solusi, kegiatan *summarizing* memiliki hubungan dengan indikator menganalisis pernyataan dan membuat kesimpulan logis, sedangkan kegiatan *predicting* memiliki hubungan dengan indikator membuat kesimpulan logis. Berdasarkan beberapa pernyataan tersebut dapat disimpulkan bahwa *reciprocal teaching* dapat dimodifikasi sehingga sesuai dan dapat mencapai tujuan pembelajaran.

Aktivitas *questioning* dimaksudkan untuk mendorong siswa mencari hal-hal yang belum diketahui dari suatu materi atau permasalahan yang diberikan. Saat siswa mencari informasi tentang materi atau permasalahan yang diperoleh, siswa cenderung menggunakan kemampuan bernalarnya. Hal serupa dikemukakan oleh Parta (2009) bahwa saat membuat pertanyaan siswa akan mensintesis pemikirannya selama pembelajaran berlangsung. Pada saat siswa mendapatkan jawaban dari permasalahan yang didapat, siswa akan menguatkan pemahaman mereka dengan mencari informasi dari sumber lain, ataupun mengklarifikasi dengan pendapat teman kelompok. Pada tahap ini seseorang akan lebih termotivasi untuk memahami dengan cara menganalisis suatu informasi.

Pada aktivitas *summarizing*, siswa menuangkan pemahaman yang telah diperoleh dengan bahasa sendiri berdasarkan pemahamannya, sehingga kemampuan menganalisis atau mengevaluasi suatu informasi dapat ditingkatkan (Ardiansyah, 2015). Hal yang sama diungkapkan oleh Yang (2010) bahwa saat membuat rangkuman, siswa akan menghapuskan informasi yang tidak begitu penting dan mengidentifikasi atau mengkonstruksi secara keseluruhan yang dinyatakan ke dalam pernyataan utama. Rangkuman yang dibuat bertujuan untuk membuktikan kepada pembaca bahwa kebenaran yang ingin disampaikan melalui proses penalaran memang dapat diterima sebagai suatu yang logis. Berdasarkan beberapa pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa kemampuan siswa dalam membuat kesimpulan yang logis dapat ditingkatkan pada tahap *summarizing*.

Aktivitas *predicting* dimaksudkan untuk menuangkan hal-hal yang belum diketahui pada pada langkah selanjutnya dan perlu penjelasan yang lebih detail yang dituangkan dalam bentuk tulisan (Ardiansyah, 2015). Hal yang sama diungkapkan oleh Kim & Kasmer (2007:359) bahwa *prediction is a type of reasoning that can lead to a generalization of pattern and also be derived from a generalization*. Berdasarkan beberapa pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa *predicting* dapat mendorong siswa untuk menggunakan

kemampuan bernalarnya pada permasalahan selanjutnya yang diberikan berdasarkan pemahaman yang diperoleh dari tahapan sebelumnya.

### 2.3. Tinjauan Materi Trigonometri

Trigonometri adalah salah satu bahasan matematika yang harus di pahami oleh siswa untuk mengembangkan pemahaman matematikanya (Gur, 2009). Hal tersebut sependapat dengan Ohrun (2003) yang mengatakan bahwa untuk sebagian besar siswa pada pendidikan tinggi, trigonometri merupakan bagian analisis yang penting dalam bernalar. Kreativitas dan pemahaman trigonometri penting dalam mengembangkan notasi/symbol dan metode dalam matematika. Hal yang sama dikatakan NCTM (2000) bahwa jika siswa terlibat secara ekstensif dalam manipulasi symbol matematika sebelum mereka mengembangkan dasar konseptual yang benar maka mereka tidak akan bisa melakukan manipulasi yang lebih (NCTM, 2000). Dengan demikian, pemahaman siswa dalam materi trigonometri sangat penting sehingga siswa dapat menyelesaikan permasalahan-permasalahan trigonometri dengan kemampuan manipulasi dan bernalarnya.

Materi trigonometri di SMA dalam kurikulum 2013 diawali dengan konsep dasar sudut pada kesebangunan. Sudut-sudut yang bersesuaian memiliki besar sudut yang sama. Kemudian materi selanjutnya yaitu perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku. Definisi pada perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku digunakan untuk membuktikan pernyataan-pernyataan yang terkait dengan memperhatikan proses bernalar siswa sehingga siswa dapat mengembangkan kemampuan bernalar dan membuktikannya.

### 2.4. Penalaran dan Pembuktian pada Materi Trigonometri dalam *Reciprocal Teaching*

Trigonometri merupakan salah satu materi dalam matematika yang dapat membangun rasa ingin tahu sehingga siswa berkeinginan kuat untuk mengeksplorasi lebih dalam materi ini (Moore, 2011). Pada kurikulum 2013, trigonometri melibatkan siswa untuk bernalar dan pembuktian untuk mendorong siswa memiliki kemampuan berpikir tingkat tinggi secara kritis, logis, dan sistematis. Dengan demikian, mengembangkan kemampuan penalaran dan pembuktian dalam trigonometri merupakan tujuan penting dalam matematika.

Materi trigonometri yang bisa diberikan kepada siswa terkait dengan penalaran dan pembuktian pada *reciprocal teaching*, dapat dilaksanakan sebagai berikut.

#### a. *Questioning*

Guru meminta siswa untuk mencari informasi mengenai perbandingan trigonometri, sehingga siswa dapat memperoleh pemahaman materi.

#### b. *Clarifying*

Guru meminta siswa mengklarifikasi pemahaman yang diperoleh dengan membandingkan berbagai sumber, atau dengan berdiskusi dengan teman kelompok. Kemudian guru mengklarifikasi pemahaman siswa dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan untuk mengetahui pemahaman siswa dan proses bernalar siswa.

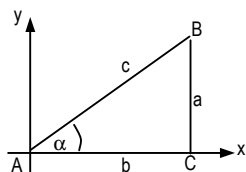
c. *Summarizing*

Guru meminta siswa merangkum apa yang telah mereka dapatkan pada lembar yang diberikan oleh guru sehingga lebih menguatkan pemahaman siswa dan lebih mengkonstruksi pemahaman konsep dan proses bernalar siswa.

d. *Predicting*

Guru memberikan permasalahan-permasalahan trigonometri yang memfasilitasi siswa untuk memprediksi sehingga melibatkan penalaran dan pembuktian siswa. Masalah yang dapat diberikan kepada siswa sebagai berikut.

Masalah



Tunjukkan bahwa  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , kemudian tunjukkan dalam beberapa sudut istimewa! Selanjutnya dengan menggunakan pernyataan di atas buktikan bahwa  $3 \cos^2 A - 2 = 1 - 3 \sin^2 A$

Dalam masalah di atas, apabila dikaji berdasarkan standar penalaran dan pembuktian dari NCTM maka masalah tersebut sudah memuat keempat standar. Standar *reasoning and proof* poin 1 (RP1): Siswa mengenali masalah tersebut dan mulai menyusun strategi penyelesaian. Dalam menunjukkan pernyataan siswa harus membuat dugaan dan menguatkan dugaan tersebut menggunakan definisi yang diberikan. (RP2): Siswa membuat dugaan yang digunakan kemudian diinvestigasi dengan menggunakan definisi yang diberikan. (RP3): Siswa mengembangkan dan mengevaluasi pernyataan tersebut dengan mencoba dalam beberapa sudut istimewa, selanjutnya siswa menemukan solusi permasalahan tersebut. (RP4) : Untuk memperkuat pemahaman dan penalaran siswa, maka siswa memilih beberapa cara untuk menunjukkan permasalahan selanjutnya. Berikut uraian yang lebih detail dari masing-masing standar.

a. RP1

Siswa mengenali bahwa untuk menunjukkan pernyataan tersebut siswa harus menyadari bahwa melibatkan penalaran matematis. Solusi yang ditemukan harus disertai dengan argumen yang kuat berdasarkan identitas trigonometri.

b. RP2

Siswa membuat membuat strategi dan dugaan matematis dari definisi trigonometri yang diberikan.

$$\sin A = \frac{\text{sisi didepan sudut } A}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{sisi samping sudut } A}{\text{sisi miring}} = \frac{b}{c}$$

Kemudian dari teorema pythagoras kita peroleh  $a^2 + b^2 = c^2$

Sehingga

$$\sin^2 A + \cos^2 A =$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

c. RP3

Untuk mengevaluasi pernyataan tersebut siswa mencoba dengan beberapa sudut istimewa, sehingga siswa dapat mengembangkan kemampuan bernalar deduktifnya.

$$\text{Untuk sudut } 30^0, \sin^2 30^0 + \cos^2 30^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\text{Untuk sudut } 45^0, \sin^2 45^0 + \cos^2 45^0 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$\text{Untuk sudut } 60^0, \sin^2 60^0 + \cos^2 60^0 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

dan seterusnya.

d. RP4

Untuk menguatkan pemahaman siswa dan mengembangkan penalaran deduktif, siswa memilih beberapa cara untuk membuktikan permasalahan  $3 \cos^2 A - 2 = 1 - 3 \sin^2 A$

Pertama, siswa dapat menggunakan pemahaman dari ruas kiri.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$\text{Ruas kiri} \rightarrow 3 \cos^2 A - 2$$

$$\begin{aligned} 3 \cos^2 A - 2 &= 3(1 - \sin^2 A) - 2 \\ &= 3 - 3 \sin^2 A - 2 = 1 - 3 \sin^2 A \end{aligned}$$

Ruas kiri = ruas kanan (terbukti)

Kedua, siswa dapat menggunakan pemahaman dari ruas kanan.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$



$$\text{Ruas kanan} = 1 - 3\sin^2 A$$

$$\begin{aligned} 1 - 3\sin^2 A &= 1 - 3(1 - \cos^2 A) \\ &= 1 - 3 + 3\cos^2 A = 3\cos^2 A - 2 \end{aligned}$$

Ruas kanan = ruas kiri (terbukti)

Apabila siswa mampu membuktikan permasalahan tersebut maka siswa sudah mampu bernalar secara deduktif. Setingkat SMA, apabila siswa mampu melakukan ini berarti penalaran siswa tersebut dianggap sangat baik dan pembuktian siswa termasuk pembuktian yang baik. Hal tersebut didukung dengan pernyataan dari Styliandes & Styliandes (2009:243) yaitu:

“Pembuktian yang baik/berkualitas itu memenuhi beberapa kriteria, diantaranya adalah sebagai berikut.

- a. Pembuktian tersebut benar
- b. Pembuktian tertuju pada pertanyaan tertentu atau masalah yang diajukan  
Pembuktian jelas, meyakinkan, dan logis. Pembuktian yang jelas itu memiliki ciri-ciri sebagai berikut: (a) pembuktian menggunakan bahasa, representasi, definisi, yang dipahami orang lain yang membaca pembuktian tersebut; (b) pembuktian harus bisa digunakan untuk meyakinkan keraguan; (c) pembuktian tidak memerlukan pembaca untuk mempercayai pembuktian tersebut (sebagai contoh “kamu harus mempercayai aku”); (d) pokok utama harus ditekankan; (e) jika dapat diterapkan didukung dengan gambar, diagram, dan persamaan digunakan jika diperlukan; (f) pembuktian koheren; (g) jelas, melengkapi kalimat yang digunakan; dan (h) pembuktian dapat digunakan seseorang untuk menyelesaikan masalah yang sama.”

Berdasarkan uraian dan pendapat ahli di atas, menunjukkan bahwa apabila siswa dapat menggunakan bahwa apabila siswa dapat membuktikan dengan benar dengan langkah-langkah penalaran, maka siswa dianggap memiliki kemampuan penalaran dengan sangat baik. Proses pembuktian tidak harus mengintervensi pembaca namun dapat dilakukan dengan langkah-langkah tepat sehingga dapat dipahami dengan mudah oleh pembaca.

### 3. Kesimpulan dan Saran

Penalaran dan pembuktian sudah seharusnya diajarkan di sekolah mulai tingkat *playgroup* sampai tingkat Sekolah Menengah Atas (SMA) dan sudah seharusnya ada dalam kurikulum matematika. Guru seharusnya memfasilitasi siswanya untuk terbiasa bernalar dan membuktikan/membenarkan argumennya. Salah satu cara yang bisa dilakukan guru adalah dengan merancang model pembelajaran yang dapat memfasilitasi proses bernalar dan pembuktian siswa sehingga dapat menarik minat siswa. Model pembelajaran yang dapat membantu siswa dalam bernalar yaitu *reciprocal teaching* yang sesuai dengan pendapat Ardiansyah (2015). Selain itu guru juga memberikan persoalan yang menantang agar siswa dapat mengembangkan kemampuan bernalarnya. Dengan demikian, rasa ingin tahu siswa akan meningkat dan siswa akan tertantang menyelesaikan tugas tersebut.

Guru juga seharusnya terus memberikan motivasi kepada siswa karena siswa yang mampu bernalar sangat dipentingkan dalam memahami matematika. Selain itu penalaran dan

pembuktian juga membiasakan siswa untuk berfikir secara logis dan kritis dalam menanggapi suatu kejadian dan masalah dalam matematika, sehingga dapat memberikan alasan yang valid. Hal tersebut diperkuat dengan pernyataan dalam NCTM (2000) bahwa bagian dari keindahan matematika adalah ketika hal menarik terjadi, hal tersebut harus didasarkan pada alasan yang baik.

## Daftar Pustaka

- Anggraeni, Y. 2012. Peningkatan Kemampuan Penalaran dan Komunikasi Matematis Siswa SMP Melalui *Reciprocal*. *Jurnal Pendidikan Matematika: Sigma Didaktika*. Bandung: APMI FPMIPA UPI.
- Ardiansyah, H. 2015. *Penerapan Reciprocal Teaching untuk Meningkatkan Penalaran Matematis Siswa pada Materi Relasi dan Fungsi Kelas XI IPA SMA Laboratorium UM*. Tesis PPs UM Malang: Tidak Diterbitkan.
- Boch, F. 2005. Note Taking and Learning: A Summary of Research. *The WAC Journal*, (16): 101-113.
- Boesen, J. L. 2010. The Relation Between Types of Assessment Tasks and The Mathematical Reasoning Students Use. *Educational Studies in Mathematics*, (75): 89-105.
- Bieda, K. N., dkk. 2013. *Reasoning-and-Proving Opportunities in Elementary Mathematics Textbooks*. United States: Michigan State University.
- Cooper, T. & Greive, C. 2010. *The effectiveness of the methods of reciprocal teaching, As applied within the NSW primary subject Human Society and its Environment: An exploratory study. TEACH pub Volume 3*.
- Deshpande, A. R. 2013. Text Summarization Using Clustering Technique. *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 8(4): 3348-3351.
- Dhebora, L. 2003. *The Teaching of Proof*.
- Doodittle, P. E, dkk. 2006. Reciprocal Teaching for Reading Comprehension in Higher Education: A Strategy for Fostering The Deeper Understanding of Text. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education*, (17): 106-118.
- Garderen, D. V. 2004. *Reciprocal Teaching As a Comprehension Strategy For Understanding Mathematical Word Problems. Reading & Writing Quarterly*, 20: 225-229 ISSN: 1057-3369: Taylor & Francis Inc.
- Gur, H. 2009. *Trigonometry Learning. New Horizons in Education, Vol.57, No.1, May 2009*. Balikesir University.
- Heinze, Aiso, dkk. 2006. *Learning to Prove with Heuristic Worked-out Examples*. Germany: Lehrstuhl Didaktik der Mathematik, Universitas Munchen.
- Howard, J. B. 2004. *Reciprocal Teaching*. Elon University. NC: Project T2.
- Kim, O. K., & Kasmer, L. 2007. The effect of Using Prediction Questioning in Middle School Algebra Classroom. (Online)
- Knapp, J. A. 2005. *Learning to Prove in Order to Prove to Learn*. Rizona State University.

- Meyer, K. 2014. Making meaning in mathematics problem-solving using the reciprocal teaching approach. *Literacy learning: the middle years* (22) 5 : 1-10.
- Moore, K. C. 2011. *Coherence, Quantitative Reasoning and The Trigonometry of Students*. University of Georgia.
- NCTM. 2000. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nelson Primary School 2014. *Mathematical Fluency, Reasoning and Problem Solving*, (online). Diakses di <http://nelson.richmond.sch.uk/wp-content/uploads/2014/07/NPS-understanding-of-Mathematical-Fluency-Problem-Solving-and-Reasoning.pdf>
- OECD. 2016. *PISA 2015 Result in Focus: OECD Indicators*. OECD Publishing.
- Ohrun, N. 2003. *Student's Mistakes and Misconceptions on Teaching of Trigonometry*. Anadolu University Science Faculty Mathematics Department 26470.
- Oczkus, L. 2013. *Reciprocal Teaching: Powerful Hands-on Comprehension Strategy*. The Utah Journal of Literacy Vol 16 No 1 Spring 2013.
- Pang, W. A. 2009. *Analogical Reasoning Errors in Mathematics at Junior Collage Level*. Singapore.
- Parta, I. N. 2009. *Pengembangan Model Pembelajaran Inquiry untuk Penghalusan Pengetahuan Matematika Calon Guru Melalui Pengajuan Pertanyaan*. Disertasi Tidak Diterbitkan. Surabaya: PPs UNESA.
- Reilly, Y., Parsons, J., & Bortolot, E. 2009. *Reciprocal Teaching in Mathematics*.
- Reiss, K., dkk. 2002. *Reasoning and Proof in Geometry: Prerequisites of Knowledge Acquisition in Secondary School Students*. Deutsche Forschungsgemeinschaft.
- Russefendi, E.T. 2006. *Pengantar kepada membantu guru mengembangkan kompetensinya dalam pengajaran matematika untuk meningkatkan CBSA: perkembangan kompetensi guru*. Bandung: Tarsito.
- Sanjaya, W. 2008. *Strategi Pembelajaran Berorientasi standar Proses Pendidikan*. Kencana Prenada Media Group: Jakarta.
- Slavin, R. 2008. *Cooperative Learning: Teori, Riset, dan Praktik*. Bandung: Nusa Media
- Stacey, K., & Vincent, J. 2009. *Modes of Reasoning in Explanation Australia Eight-grade Mathematics Textbook*. Springer Science + Business Media.
- Styliandes, A.J & Styliandes, G. J. 2009. *Proof constructions and evaluations*. Springer Science + Business Media.
- Sumarmo, U. 2012. *Proses Berpikir Matematik: Apa dan Mengapa Dikembangkan*. Bahan belajar matakuliah proses berpikir matematik program S2 pendidikan matematika STKIP Siliwangi.
- Yang, Y. F. 2010. *Developing a reciprocal teaching/learning system for college remedial reading instruction*. *Computer & Education* 55 (2) 1193-1201.